

CALIBRAÇÃO CONSISTENTE DE DISTORÇÕES E DESALINHAMENTOS EM INSTRUMENTOS DE PLANO FOCAL EM VEÍCULOS ESPACIAIS

Roberto V. F. Lopes * e Malcolm D. Shuster †

Algoritmos de estimação são apresentados para determinação consistente de parâmetros de calibração de distorções e desalinhamentos em órbita de instrumentos de plano focal de alta precisão, tipicamente sensores estelares em veículos espaciais. Demonstra-se a ambiguidade presente em parametrizações irrestritas, a qual implica em estimativas inconsistentes. Uma restrição adequada para remover esta ambiguidade é prescrita aos parâmetros de distorção. Resultados são apresentados considerando alinhamentos tanto em relação a algum referencial externo como a algum outro sensor de atitude.

INTRODUÇÃO

O uso prático de instrumentos científicos e sensores de atitude em veículos espaciais geralmente requer que estes sejam recalibrados após o lançamento. Além disso, devido a alterações na estrutura do veículo provenientes de efeitos de dilatação térmica e gravidade nula, também é necessário determinar o alinhamento desses dispositivos. Em veículos não tripulados, a separação das correções de alinhamento e distorção não é trivial. Tudo se torna ainda mais complicado pelo fato de que alinhamentos são usualmente representado em termos de transformações em três dimensões, enquanto que distorções do plano focal são tratadas mais convenientemente em duas dimensões. Assim, as investigações sobre interferências devidas a distorção e desalinhamento são comprometidas por uma diferença fundamental em seu trata-

* Postdoctoral Fellow, Department of Electrical Engineering, University of Maryland, College Park, Maryland, 20742, USA, e Engenheiro de Desenvolvimento Tecnológico, Divisão de Mecânica Espacial e Controle, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), 12201 São José dos Campos (SP), Brasil. email: rvfl@dem.inpe.br

† Professor, Department of Aerospace Engineering, Mechanics and Engineering Science, University of Florida, Gainesville, FL 32611, USA. email: m.shuster@ieeee.org.

mento. Um artigo anterior¹ desenvolveu a representação de rotações no plano focal. No presente trabalho, desenvolvemos e testamos algoritmos aplicando aquela representação para estimação dos parâmetros de distorção do plano focal de sensores junto com os parâmetros de rotação.

Nem sempre é devidamente apreciado o fato de que distorção e desalinhamento não são transformações independentes do plano focal. Tentativas de calibrar sensores corrigindo distorções e desalinhamentos podem portanto levar a estimativas de parâmetros individualmente desprovidas de significado. Nas calibrações em terra não surgem ambiguidades, pois o alinhamento do sensor e a calibração são feitos usualmente em relação a um cubo de alinhamento ótico montado com esta finalidade no sensor. No espaço, infelizmente, não se tem mais qualquer conhecimento sobre a real orientação do cubo de alinhamento ótico, e por isso não é mais possível separar de modo inambíguo os parâmetros de distorção dos de alinhamento.

Quando o interesse é apenas em representar a transformação dos dados do sensor do sistema do veículo para o sistema de coordenadas inerciais, então a ambiguidade inerente não acarreta qualquer erro para a análise dos dados. Contudo, se há intenção de determinar o comportamento temporal dos alinhamentos, ou correlacioná-los com outros dados do veículo, tais como a sua temperatura, então é improvável que os resultados obtidos tenham algum significado. O principal propósito desse artigo é apresentar uma metodologia segundo a qual os parâmetros de desalinhamento e de distorção terão significado.

Nós iniciamos com uma revisão da representação do desalinhamento e da distorção do plano focal desenvolvida na Ref. 1. Passamos então a estudar vários modos de combinar essas duas transformações do plano focal, demonstramos a redundância fundamental entre elas e apresentamos um método simples para remover a redundância. A distorção do plano focal de um sensor é mais frequentemente representada por séries de Taylor nas coordenadas do plano focal. Porém, o fornecedor do sensor pode por vezes preferir especificar uma outra expressão não polinomial para a função de calibração das distorções, proveniente da natureza física do sensor. Neste caso, é preciso desenvolver um meio de transformar essa função também, de modo a levar em conta a questão da redundância. Este tópico abordaremos em um futuro artigo.

Uma vez desenvolvida a representação adequada, sem ambiguidades para alinhamento e distorção, desenvolvemos algoritmos específicos para a estimação desses parâmetros. Há dois casos a considerar. No primeiro deles, os parâmetros de rotação caracterizam o alinhamento de um sensor com relação a outro. Neste caso, os parâmetros de rotação são constantes e globais, bem como os parâmetros de distorção. No segundo caso, os parâmetros de rotação caracterizam a atitude toda, e portanto são específicos ao referencial e podem variar no tempo. Por outro lado os parâmetros de distorção permanecem constantes e portanto globais. Sendo assim, para dados amostrados em instantes diferentes o tratamento não será o mesmo nos dois casos. A ênfase do trabalho contudo não está nos estimadores, sequenciais ou em lote, mas sim no modelo de medidas levando em conta o caráter especial dos parâmetros de distorção e alinhamento do plano focal. Então, nesse artigo nos concentramos no desenvolvimento de um conjunto de parâmetros adequado e no seu modelo de medidas.

Geralmente, as atividades de calibração de alinhamento e distorção são levadas a cabo por diferentes grupos que se comunicam entre si de modo incompleto. Nenhum desses dois

grupos tem preocupações com a questão da redundância dos parâmetros, desde que cada grupo trabalha com um conjunto não redundante de parâmetros para seus próprios fins. Nós mostramos, contudo, que essa prática pode conduzir a efeitos de movimento Browniano nas estimativas conjuntas dos parâmetros de distorção e alinhamento.

GEOMETRIA DO ALINHAMENTO E DA DISTORÇÃO

Geralmente se representa uma direção no espaço pela matriz 3×1 de suas componentes em alguma base. Neste trabalho, tomamos uma base tal que o eixo z é perpendicular ao plano focal do sensor, separado da origem do sistema de coordenadas por uma distância f . Então, os eixos x e y ficam nominalmente no plano focal. Nominalmente, porque devido à distorção e ao desalinhamento essas afirmações se tornam um tanto inexatas.

Para uma direção geral no espaço tri-dimensional portanto, nós escrevemos

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

O chapéu denota vetor unitário. Supondo que nosso sensor se comporta como uma perfeita câmera de orifício com plano focal a uma distância f da origem, então uma linha reta passando pela origem na direção de \hat{W} intersepta o plano focal nas coordenadas (X, Y) de tal modo que se verifica a proporcionalidade $X : Y : f = W_1 : W_2 : W_3$. Então,

$$\frac{X}{f} = \frac{W_1}{W_3} \quad \text{e} \quad \frac{Y}{f} = \frac{W_2}{W_3}, \quad (2)$$

ou

$$X = f \frac{W_1}{W_3} \quad \text{e} \quad Y = f \frac{W_2}{W_3}. \quad (3)$$

Essas equações podem ser invertidas, dando

$$\hat{W} = \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + f^2}} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ f \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Será vantajoso contudo definir coordenadas específicas para o plano focal, dadas por

$$x \equiv X/f \quad \text{e} \quad y \equiv Y/f, \quad (5)$$

de tal modo que

$$x = \frac{W_1}{W_3} \quad \text{e} \quad y = \frac{W_2}{W_3}, \quad (6)$$

o que leva a

$$\hat{W} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Desse modo, chegamos a uma representação da distorção que não depende explicitamente das dimensões da câmera de orifício. De fato essas coordenadas específicas para o plano focal não dependem de modo algum do instrumento e podem ser usadas para representar dados de qualquer sensor de plano focal, não importando qual seja sua construção. Ou seja, temos um sistema universal de coordenadas.

PARAMETRIZAÇÃO DA DISTORÇÃO E DO ALINHAMENTO

Parte da confusão acerca de alinhamento e distorção é que os dois são representados em dois espaços diferentes. Geralmente distorção é representada em termos de parâmetros do plano focal, o que em termos vetoriais é

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + F(\mathbf{x}), \quad (8)$$

ou, em termos de suas componentes

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Aqui \mathbf{x}' é o vetor observado no plano focal sem correções de distorção do instrumento (i.e., o vetor distorcido), e \mathbf{x} é o vetor plano focal verdadeiro (i.e., ideal), livre de qualquer efeito de distorção. Geralmente assume-se que as funções $F_1(x, y)$ e $F_2(x, y)$ são dadas por séries polinomiais.

$$F_1(x, y) = a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + \dots \quad (10a)$$

$$F_2(x, y) = b_{0,0} + b_{1,0}x + b_{0,1}y + b_{2,0}x^2 + b_{1,1}xy + b_{0,2}y^2 + \dots \quad (10b)$$

Frequentemente a série vai até a segunda ordem, o que implica em seis termos para cada componente, ou até a terceira ordem, o que leva a dez termos em cada componente (expansões até a sexta ordem com 28 termos em cada componente não são impensáveis). As funções $F_1(x, y)$ e $F_2(x, y)$ assumem valores bem pequenos sobre o plano focal dos sensores. Afora os efeitos de desalinhamento, os quais iremos analisar detalhadamente logo mais adiante, os maiores termos serão mais provavelmente $a_{1,0}$ e $b_{0,1}$, que se devem à expansão térmica do plano focal.

Alinhamento, por outro lado, é uma rotação pura, e tende a ser representado no espaço completo, tri-dimensional, como uma transformação ortogonal,^{2,3} que podemos escrever como⁴

$$S = \cos \theta I_{3 \times 3} + (1 - \cos \theta) \hat{n} \hat{n}^T + \sin \theta [[\hat{n}]], \quad (11)$$

onde θ é o ângulo da rotação e \hat{n} , um vetor unitário, é o eixo de rotação. Assim como nas Refs. 2 e 3, $[[\mathbf{v}]]$ denota a matriz anti-simétrica 3×3

$$[[\mathbf{v}]] \equiv \begin{bmatrix} 0 & v_3 & -v_2 \\ -v_3 & 0 & v_1 \\ v_2 & -v_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

As expansões em séries das Eqs. (10), se levadas a todas as ordens indefinidamente, podem representar qualquer transformação analítica do plano focal. Portanto, uma rotação do plano focal ao redor de um eixo arbitrário é necessariamente expressável em termos das Eqs. (10) com os valores apropriados dos coeficientes $\{a_{0,0}, a_{1,0}, \dots, b_{0,0}, b_{1,0}, \dots\}$. Estes coeficientes estão, de fato, derivados para qualquer ordem na Ref. 1. Portanto, é óbvio que as rotações e as distorções são redundantes.

Certamente poderíamos tratar a transformação do plano focal em termos de distorções apenas, e nunca introduzir a matriz de rotação em nossa representação. Infelizmente, porém, embora as distorções do plano focal provenientes de distorções térmicas, gravidade nula, e outros efeitos ambientais sejam pequenas, a rotação do plano focal do sensor (em particular se medimos esta rotação a partir do sistema inercial) pode ser bem grande. Portanto, a série de Taylor iria requerer um número infinito de termos. A abordagem inteligente, portanto, é tratar a rotação expressando-a em termos de matriz de rotação 3×3 (ou quaternion, ou ângulos de Euler, etc.), e remover esses graus de liberdade da equação de distorção Eqs. (10), de modo que a expansão não será redundante. O objetivo final desse artigo é mostrar exatamente como realizar isso.

Para falar conjuntamente sobre rotações e distorções, devemos ser capazes de falar sobre estes dois assuntos nos mesmos termos. Será mais fácil representar rotações em termos de coordenadas de plano focal do que expressar as distorções do plano focal em termos de uma matriz 3×3 .

Considere-se a equação

$$\mathbf{U} \equiv R \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11}x + R_{12}y + R_{13} \\ R_{21}x + R_{22}y + R_{23} \\ R_{31}x + R_{32}y + R_{33} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

A terceira componente do vetor \mathbf{U} obviamente não é unitária e portanto as duas primeiras componentes de \mathbf{U} não correspondem exatamente às coordenadas do plano focal. Para tornar a terceira componente unitária, simplesmente divide-se o membro da direita da Eq. (13) pela terceira componente para obter

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{R_{31}x + R_{32}y + R_{33}} R \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

ou

$$x' = \frac{R_{11}x + R_{12}y + R_{13}}{R_{31}x + R_{32}y + R_{33}}, \quad (15a)$$

$$y' = \frac{R_{21}x + R_{22}y + R_{23}}{R_{31}x + R_{32}y + R_{33}}. \quad (15b)$$

Esta é a transformação do plano focal de uma transformação em três dimensões. As equações (15) valem para qualquer transformação linear, embora neste caso, R seja uma matriz de rotação. As equações (15) são conhecidas em geral como equações de colinearidade e possuem um importante papel em fotogrametria por satélite.^{5,6}

CORRESPONDÊNCIA ENTRE ALINHAMENTO E DISTORÇÃO EM ROTAÇÕES INFINITESIMAIS

Vamos examinar uma rotação infinitesimal, escrita assim

$$R(\theta) \approx \begin{bmatrix} 1 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\theta_3 & 1 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Da Ref. 1, sabemos que os coeficientes de distorção do plano focal em uma rotação pura são dados por

$$a_{ij} = (-1)^{i+j+1} \frac{R_{31}^{i-1} R_{32}^{j-1}}{R_{33}^{i+j+1}} \left[\binom{i+j-1}{i} R_{31} (R_{12} R_{33} - R_{13} R_{32}) + \binom{i+j-1}{j} R_{32} (R_{11} R_{33} - R_{13} R_{31}) \right], \quad (17a)$$

e

$$b_{ij} = (-1)^{i+j+1} \frac{R_{31}^{i-1} R_{32}^{j-1}}{R_{33}^{i+j+1}} \left[\binom{i+j-1}{i} R_{31} (R_{22} R_{33} - R_{23} R_{32}) + \binom{i+j-1}{j} R_{32} (R_{21} R_{33} - R_{23} R_{31}) \right], \quad (17b)$$

onde $\binom{n}{i}$ é o coeficiente binomial

$$\binom{n}{i} \equiv \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} & \text{para } 1 \leq i \leq n, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (18)$$

Substituindo na Eq. (16) resultam expressões correspondentes para rotações infinitesimais

$$a_{ij} = (-1)^i \theta_2^{i-1} \theta_1^{j-1} \left[\binom{i+j-1}{i} \theta_2 \theta_3 - \binom{i+j-1}{j} \theta_1 \right], \quad (19a)$$

$$b_{ij} = (-1)^i \theta_2^{i-1} \theta_1^{j-1} \left[\binom{i+j-1}{i} \theta_2 + \binom{i+j-1}{j} \theta_1 \theta_3 \right], \quad (19b)$$

onde retivemos apenas os termos dominantes. Claramente, $a_{i,j}$ e $b_{i,j}$ serão ao menos quadráticos nos ângulos para $i+j > 2$. Assim, as rotações infinitesimais afetam apenas alguns poucos termos de distorção. Se calcularmos Eqs. (19) para $i+j \leq 2$, encontraremos para a primeira ordem nos ângulos infinitesimais que

$$x' = x - \theta_2 + \theta_3 y - \theta_2 x^2 + \theta_1 xy + \dots, \quad (20a)$$

$$y' = y + \theta_1 - \theta_3 x - \theta_2 xy + \theta_1 y^2 + \dots. \quad (20b)$$

de tal modo que oito dos doze primeiros termos são afetados por rotações infinitesimais. Estas mesmas equações resultam igualmente inserindo Eq. (16) diretamente nas Eqs. (15). Dentro de uma região infinitesimal em torno do centro do plano focal, que corresponde a $(x, y) = (0, 0)$, temos que

$$x' = x - \theta_2 + \theta_3 y + \dots, \quad (21a)$$

$$y' = y + \theta_1 - \theta_3 x + \dots \quad (21b)$$

Em qualquer aplicação prática (veja exemplos a seguir), deseja-se forçar esses três ângulos a se anularem. Então, são esses os únicos termos que teremos que considerar na região infinitesimalmente próxima do centro do plano focal.

Claramente, se desejamos remover a redundância entre os parâmetros de distorção e os parâmetros de rotação a partir da análise do comportamento das coordenadas no centro do plano focal, devemos impor

$$a_{0,0} = b_{0,0} = 0, \quad (22)$$

desde que o efeito destes parâmetros é indistinguível daqueles causados por $-\theta_2$ e θ_1 . Quanto a θ_3 o argumento é um pouco mais complicado. Se reescrevermos os primeiros poucos termos da Eq. (9) como

$$x' = a_{0,0} + a_{1,0} x + [(a_{0,1} + b_{1,0})/2 + (a_{0,1} - b_{1,0})/2] y + \dots, \quad (23a)$$

$$y' = b_{0,0} + [(a_{0,1} + b_{1,0})/2 - (a_{0,1} - b_{1,0})/2] x + b_{0,1} y + \dots, \quad (23b)$$

então veremos que o efeito de uma rotação infinitesimal θ_3 é indistinguível do efeito de $(a_{0,1} - b_{1,0})/2$ no centro do campo de visada. Portanto, para remover essa redundância, devemos impor

$$a_{0,1} - b_{1,0} = 0. \quad (24)$$

Na verdade essa não é a única escolha que poderíamos fazer. Por exemplo, poderíamos escolher ao invés

$$a_{2,0} = b_{0,2} = a_{0,1} - b_{1,0} = 0. \quad (25)$$

desde que $a_{2,0}$ e $b_{0,2}$ também são afetados linearmente pelas rotações infinitesimais. Matematicamente isso seria perfeitamente aceitável, pois também leva a um conjunto não redundante de variáveis. Fisicamente, porém, tal escolha seria desastrosa, pois levaria a parâmetros de rotação tremendamente influenciados por distorções não lineares do plano focal, de modo que aquilo que fisicamente consideraríamos ser desalinhamento do centro do plano focal dominaria o efeito de diversos parâmetros de distorção. Estes por sua vez se tornariam assim altamente sensíveis a atitude do sensor, podendo conseqüentemente assumir valores irrealisticamente elevados. Assim sendo, embora tal prescrição seja matematicamente consistente, ela não satisfaz o objetivo de suprimir uma forte dependência dos parâmetros de distorção à atitude, e traria ainda mais confusão do que simplesmente utilizar apenas o conjunto completo de parâmetros de distorção e ignorar a parametrização de rotações. Portanto, escolhemos como nosso conjunto de parâmetros do plano focal os três parâmetros de atitude e os parâmetros de distorção com a restrição

$$a_{0,0} = b_{0,0} = a_{0,1} - b_{1,0} = 0. \quad (26)$$

ORDEM DAS TRANSFORMAÇÕES DE DISTORÇÃO E ALINHAMENTO

Seja \mathcal{E} o referencial inercial e \mathcal{I} o referencial do instrumento. Analogamente, seja \mathcal{D} a transformação de distorção, e \mathcal{R} a transformação de rotação expressa nas coordenadas do plano focal. Assim, podemos escrever a mudança nas coordenadas do plano focal devido a distorção somente por

$$\mathbf{x}' = \mathcal{D}(\mathbf{x}, \Lambda), \quad (27)$$

onde Λ denota a totalidade dos parâmetros (exceto, naturalmente $a_{0,0}$ e $b_{0,0}$, que agora são identicamente nulos, e $b_{1,0}$, que é dado identicamente por $a_{0,1}$). A mudança em coordenadas do plano focal devido apenas à rotação é dada por

$$\mathbf{x}' = \mathcal{R}(\mathbf{x}, \theta), \quad (28)$$

onde θ é o vetor rotação (finita), que caracteriza a rotação. Estas equações são simplesmente uma abreviatura das Eqs. (10) e (15). Se consideramos o efeito de ambos desalinhamento e distorção, então somos levados a descrever seu efeito combinado de uma das duas formas seguintes: transformação de alinhamento computada primeiro, seguida pela distorção

$$\mathbf{x}' = \mathcal{D}(\mathbf{x}_m, \Lambda), \quad (29a)$$

$$\mathbf{x}_m = \mathcal{R}(\mathbf{x}, \theta). \quad (29b)$$

ou essas mesmas transformações porém na ordem oposta

$$\mathbf{x}' = \mathcal{R}(\mathbf{x}_d, \theta'), \quad (30a)$$

$$\mathbf{x}_d = \mathcal{D}(\mathbf{x}, \Lambda'), \quad (30b)$$

Assim, ou primeiro desalinhamos e depois distorcemos ou primeiro distorcemos e depois desalinhamos. Se θ é grande, então claramente haverá uma grande diferença entre o referencial do instrumento e o referencial inercial. Se a distorção vem primeiro, então os coeficientes de distorção serão efetivamente calculados com relação aos eixos inerciais, o que faz pouco sentido. Também a distorção é um fenômeno que se identifica mais com o próprio instrumento, enquanto que desalinhamento está mais associado com a estrutura do veículo espacial. Ora, se distorcemos o plano focal antes de rotacioná-lo, então os parâmetros do plano focal dependerão da atitude, o que queremos justamente evitar. Portanto, fisicamente a primeira alternativa, Eqs. (29), é mais natural, e do ponto de vista prático é bem mais simples.

SISTEMAS DE REFERÊNCIA

Considere-se primeiramente o caso em que os parâmetros de rotação representem o alinhamento. A convenção adotada nas Referências 2 e 3 para desalinhamento não é inteiramente adequada para o estudo de desalinhamentos e distorções. Seja $\hat{U}_{i,k,\ell}$ o ℓ -th vetor observado pelo sensor i no tempo t_k no sistema de coordenadas do sensor, e sejam $\hat{V}_{i,k,\ell}$ e $\hat{W}_{i,k,\ell}$ os correspondentes vetores coluna em coordenadas inerciais e do veículo. Então a matriz de atitude causa a transformação

$$\hat{W}_{i,k,\ell} = A_k \hat{V}_{i,k,\ell} + \Delta \hat{W}_{i,k,\ell}, \quad (31)$$

enquanto que a transformação de alinhamento causa a transformação

$$\hat{W}_{i,k,\ell} = S_i \hat{U}_{i,k,\ell}. \quad (32)$$

Aqui $\Delta \hat{W}_{i,k,\ell}$ é o ruído de medida. (Note que o ruído de medida aparece apenas implicitamente na Eq. (32).) Claramente a atitude deve depender do tempo, mas não de um sensor específico, enquanto que a matriz de alinhamento depende do sensor, mas não do tempo. Esta última declaração é apenas uma idealização, porque na prática os alinhamentos também podem mudar com o tempo devido, por exemplo, a mudanças no carregamento térmico do veículo.

Se na Ref. 2, S_i^o era um valor *a priori* da matriz de alinhamento, e S_i era o alinhamento correto, então a matriz de desalinhamento M_i^B (escrita simplesmente M_i nas Refs. 2 e 3) era definida de tal modo que

$$S_i = M_i^B S_i^o. \quad (33)$$

Da Eq. (32) é claro que M_i^B é a transformação do sistema do veículo *a priori* para o correto. Combinando as Eqs. (31), (32) e (33) temos que

$$\hat{U}_{i,k,\ell} = S_i^T \hat{W}_{i,k,\ell} \quad (34a)$$

$$= S_i^T A_k \hat{V}_{i,k,\ell} + \Delta \hat{U}_{i,k,\ell} \quad (34b)$$

$$= S_i^o T M_i^B T A_k \hat{V}_{i,k,\ell} + \Delta \hat{U}_{i,k,\ell}. \quad (34c)$$

São os parâmetros de $M_i^B T$ que desejamos estimar a partir das medidas $\hat{U}_{i,k,\ell}$. Estas, obviamente, não são convenientes por causa da transformação $S_i^o T$. Por isso, definimos um desalinhamento com referência ao instrumento

$$S_i = S_i^o M_i^T, \quad (35)$$

tal que

$$M_i^B = S_i^o M_i^T S_i^o T. \quad (36)$$

Escrevendo na forma usual

$$M_i^B \approx I_{3 \times 3} + [[\theta_i^B]] \quad \text{e} \quad M_i^T \approx I_{3 \times 3} + [[\theta_i^T]], \quad (37)$$

segue que

$$\theta_i^B = S_i^o \theta_i^T. \quad (38)$$

Assim, podemos escrever

$$\hat{U}_{i,k,\ell} = M_i^T T S_i^o T A_k \hat{V}_{i,k,\ell} + \Delta \hat{U}_{i,k,\ell} \quad (39a)$$

$$= M_i^T T \hat{U}_{i,k,\ell}^o + \Delta \hat{U}_{i,k,\ell}, \quad (39b)$$

$$\approx \hat{U}_{i,k,\ell} - [[\theta_i^T]] \hat{U}_{i,k,\ell} + \Delta \hat{U}_{i,k,\ell}, \quad (39c)$$

$$= \hat{U}_{i,k,\ell} + [[\hat{U}_{i,k,\ell}^o]] \theta_i^T + \Delta \hat{U}_{i,k,\ell}, \quad (39d)$$

onde

$$\hat{U}_{i,k,\ell}^o \equiv S_i^{oT} A_k \hat{V}_{i,k,\ell} \quad (40)$$

é o valor *a priori* da medida do instrumento no sistema deste, dada a matriz de alinhamento *a priori* e a atitude.

Em cálculos práticos, não se conhece A_k mas apenas a atitude estimada A_k^* , dada por

$$A_k^* = e^{[[\xi_k]]} A_k. \quad (41)$$

Aqui, ξ_k é o erro de estimação de atitude, supostamente gaussiano, de média nula, e covariância $P_{\xi,k}$. Neste caso a Eq. (39a) se torna

$$\hat{U}_{i,k,\ell} = M_i^{TT} S_i^{oT} e^{-[[\xi_k]]} A_k^* \hat{V}_{i,k,\ell} + \Delta \hat{U}_{i,k,\ell}, \quad (42)$$

o que leva a

$$\hat{U}_{i,k,\ell} = \hat{U}_{i,k,\ell}^o + [[\hat{U}_{i,k,\ell}^o]] \theta_i^T + \Delta \hat{U}_{i,k,\ell} + [[\hat{U}_{i,k,\ell}^o]] S_i^{oT} \xi_k, \quad (43)$$

onde agora

$$\hat{U}_{i,k,\ell}^o \equiv S_i^{oT} A_k^* \hat{V}_{i,k,\ell}, \quad (44)$$

e aparece um termo extra, o ruído.

Em geral o conjunto completo de alinhamentos absolutos não pode ser determinado após o lanamento com alta confiança.³ Portanto, é comum na prática arbitrar uma das matrizes de desalinhamento M_i^T como sendo a matriz identidade. Isso efetivamente define o sistema de coordenadas do corpo do veículo como uma rotação fixa a partir do sistema de coordenadas do sensor i , enquanto que os alinhamentos dos sensores se tornam efetivamente co-alinhamentos.

A equação (39) assume que a matriz de atitude do veículo A_k é conhecida a partir de alguma outra fonte. Contudo isto pode não ser sempre o caso. Por exemplo, no caso de se querer calcular os coeficientes de distorção e co-alinhamento do instrumento calculando primeiro a atitude e os coeficientes de distorção para cada sensor (isso assume que cada sensor possa medir direções múltiplas) e então computar os co-alinhamentos a partir das atitudes individuais dos instrumentos. Em tal situação, definimos

$$A_{i,k} = S_i^T A_k, \quad (45)$$

como a atitude do instrumento. Então

$$A_{i,k} = (\delta A_{i,k}) A_{i,k}^o, \quad (46)$$

onde $A_{i,k}^o$ é a atitude *a priori* do instrumento e $\delta A_{i,k}$ é a correção da atitude, que esperamos seja também uma correção pequena.

O conjunto completo de transformações que aplicamos para obter um dado distorcido e desalinhado a partir de um dado conhecimento *a priori* é o seguinte:

- Dado $\hat{V}_{i,k,\ell}$, $\ell = 1, \dots, n_{i,k}$ e a atitude *a priori* do instrumento (ou $\hat{V}_{i,k,\ell}$, $\ell = 1, \dots, n_{i,k}$, a atitude do veículo espacial e a matriz de alinhamento *a priori* do instrumento, computamos $\hat{U}_{i,k,\ell}^o$, $\ell = 1, \dots, n_{i,k}$, e escrevemos

$$\hat{U}_{i,k,\ell} = (\delta C) \hat{U}_{i,k,\ell}^o, \quad \ell = 1, \dots, n_{i,k},$$

onde δC denota $\delta A_{i,k}$ (ou M_i^{TT}).

- Usando Eq. (6) computamos x , a representação do plano focal de $\hat{U}_{i,k,\ell}^o$.
- Usando Eq. (20) computamos x_m , as coordenadas do plano focal corrigidas quanto a desalinhamento.
- Usando Eqs. 10 e o conjunto reduzido de coeficientes (Eq. (21)), computamos as coordenadas do plano focal distorcido x' .

O MODELO DE MEDIDAS

Estamos agora preparados para estimar os parâmetros de alinhamento e distorção, isto é, os parâmetros de δC e o conjunto reduzido de parâmetros de distorção $\{a_{1,0}, a_{0,1}, a_{2,0}, \dots, b_{0,1}, b_{2,0}, \dots\}$.

Os dois casos apresentados acima, nos quais se estimam ou os parâmetros de M_i^T ou de $\delta A_{i,k}$, são fundamentalmente diferentes. Se houver conhecimento disponível da atitude proveniente de alguma fonte distinta do instrumento em consideração, então podemos ver δC (i.e., M_i^T) como sendo o mesmo para cada conjunto simultâneo de dados (i.e., cada valor de k). Todos os demais parâmetros sendo estimados neste caso são globais. Contudo, caso a atitude esteja sendo determinada a partir dos mesmos dados, então δC (i.e., $A_{i,k}$ neste caso) será diferente em cada lote de medidas. Devemos portanto estimar uma mistura de parâmetros globais e específicos. Examinaremos os dois casos.

Nós computamos o modelo de medidas (i.e., a matriz de sensibilidade das medidas) em três passos. Em cada caso acima contamos com uma rotação *a priori*, aqui denotada por $R_{i,k}^o$, e com um conjunto de medidas vetoriais *a priori* $\hat{U}_{i,k,\ell}^o$, $\ell = 1, \dots, n_{i,k}$. A partir destes $R_{i,k}^o$ e das direções *a priori* computamos $x(i, k, \ell)$, as coordenadas do plano focal *a priori*, de acordo com a Eq. (15). Aplicamos então a rotação (infinitesimal) corretiva $\delta R_{i,k}$, que nas coordenadas do plano focal é dada por

$$x_m(i, k, \ell) \equiv \begin{bmatrix} x_m(i, k, \ell) \\ y_m(i, k, \ell) \end{bmatrix} \quad (47a)$$

$$= \begin{bmatrix} x(i, k, \ell) \\ y(i, k, \ell) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\theta_2 + \theta_3 y - \theta_2 x^2 + \theta_1 xy \\ \theta_1 - \theta_3 x - \theta_2 xy + \theta_1 y^2 \end{bmatrix}_{i,k,\ell} + O(|\theta|^2). \quad (47b)$$

Finalmente, aplicamos a correção de distorção.

$$x' \equiv \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1(x_m, y_m) \\ F_2(x_m, y_m) \end{bmatrix}, \quad (48)$$

e

$$F_1(x_m, y_m) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} x_m^i y_m^j, \quad (49a)$$

$$F_2(x_m, y_m) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} b_{i,j} x_m^i y_m^j, \quad (49b)$$

com a restrição de que

$$a_{0,0} = 0, \quad b_{0,0} = 0, \quad e \quad b_{1,0} = a_{0,1}. \quad (50)$$

Por simplicidade deixamos de escrever os subscritos i, k, ℓ em cada par de coordenadas do plano focal.

A medida é dada por

$$\mathbf{z}_{i,k,\ell} = \mathbf{x}'_{i,k,\ell} + \mathbf{v}_{i,k,\ell} \quad (51)$$

onde $\mathbf{v}_{i,k,\ell}$ é o ruído de medidas, que geralmente assumimos ser branco e gaussiano.

Denotamos o conjunto completo de parâmetros (rotação mais distorção) por

$$\boldsymbol{\lambda} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} \quad (52a)$$

$$= [\theta_1, \theta_2, \theta_3, a_{1,0}, a_{0,1}, a_{2,0}, a_{1,1}, \dots, b_{0,1}, b_{2,0}, b_{1,1}, \dots]^T. \quad (52b)$$

Visto que queremos estimar os parâmetros, escrevemos

$$\mathbf{z}_{i,k,\ell} = \mathbf{z}_{i,k,\ell}^{\circ} + H_{i,k,\ell} \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{v}_{i,k,\ell}, \quad (53)$$

com

$$\mathbf{z}_{i,k,\ell}^{\circ} = \mathbf{x}_{i,k,\ell}, \quad (54)$$

que foi determinado de $\hat{\mathbf{U}}_{i,k,\ell}^{\circ}$, $\ell = 1, \dots, n_{i,k}$, e $R_{i,k}^{\circ}$, e podemos particionar a matriz de sensibilidade das medidas como

$$H_{i,k,\ell} = [H_{\theta i,k,\ell} \quad H_{\Lambda i,k,\ell}]. \quad (55)$$

Claramente,

$$H_{\theta i,k,\ell} = \frac{\partial \mathbf{z}_{i,k,\ell}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \mathbf{z}_{i,k,\ell}}{\partial x_m(i, j, \ell)} \frac{\partial x_m(i, j, \ell)}{\partial \boldsymbol{\theta}}, \quad (56)$$

e

$$H_{\Lambda i,k,\ell} = \frac{\partial \mathbf{z}_{i,k,\ell}}{\partial \boldsymbol{\Lambda}}. \quad (57)$$

As derivadas parciais individuais são dadas por

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_m} = \begin{bmatrix} 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} i a_{i,j} x_m^{i-1} y_m^j \\ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} i b_{i,j} x_m^{i-1} y_m^j \end{bmatrix} \quad (58a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial y_m} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} j a_{i,j} x_m^i y_m^{j-1} \\ 1 + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} j b_{i,j} x_m^i y_m^{j-1} \end{bmatrix} \quad (58b)$$

$$\frac{\partial x_m}{\partial \theta} = [x_m y_m \quad (-1 - x_m^2) \quad y_m] \quad (59a)$$

$$\frac{\partial y_m}{\partial \theta} = [(1 + y_m^2) \quad -x_m y_m \quad -x_m] \quad (59b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial a_{i,j}} = \begin{bmatrix} x_m^i y_m^j \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{para } (i, j) \neq (0, 1) \text{ ou } (0, 0), \quad (60a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial b_{i,j}} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_m^i y_m^j \end{bmatrix} \quad \text{para } (i, j) \neq (1, 0) \text{ ou } (0, 0), \quad (60b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial a_{0,1}} = \begin{bmatrix} y_m \\ x_m \end{bmatrix}. \quad (60c)$$

Em todas as fórmulas anteriores, enfatizamos uma vez mais que $a_{0,0} = b_{0,0} = 0$ e $b_{1,0} = a_{1,0}$. Nas fórmulas acima adotamos a convenção de que a derivada de um escalar com respeito a um vetor coluna é um vetor linha.

EXAMPLOS NUMÉRICOS

Para ilustrar a necessidade de estimar parâmetros de alinhamento e distorção desse modo consideramos um exemplo típico. Em operações normais, a equipe de operações de vôo vai estimar a atitude e os alinhamentos assumindo um dado conjunto de parâmetros de distorção, enquanto que os parâmetros de distorção serão estimados pela equipe do instrumento, assumindo uma dada atitude e alinhamento. Geralmente cada equipe usará diferentes conjuntos de dados e levará suas operações a cabo em instantes diferentes. Desde que cada conjunto

de parâmetros das equipes são bem definidos, não há problema de redundância em cada caso individual. A comunicação entre cada equipe é usualmente limitada a transmitir o conjunto de parâmetros estimados. Este é o modo formal de operação de todos os veículos espaciais conhecidos pelos autores. (De fato este é o modo usual mesmo quando os coeficientes de distorção e desalinhamento são estimados pelo mesmo grupo!)

Claramente, haverá redundância de parâmetros entre as duas equipes mas não para as atividades de cada equipe individualmente. Nas figuras que se seguem nós consideramos este método, que denominamos "Método 1," e dois outros métodos. O Método 3 é idêntico ao Método 1 exceto que os coeficientes de distorção estão sob a restrição

$$a_{0,0} = b_{0,0} = a_{0,1} - b_{1,0} = 0.$$

No Método 3 os coeficientes de alinhamento e distorção sob restrição são estimados simultaneamente. Em cada caso assumimos que o verdadeiro valor dos coeficientes de distorção eram nulos e a matriz de atitude para o sensor era a matriz identidade, o que significa que o verdadeiro valor dos desalinhamentos era zero. Por dezesseis blocos de dados, 50 direções foram observadas em cada bloco. Foi assumido que a incerteza em cada direção observada era de 1 grau por eixo. O campo de visada do sensor foi de 20 graus ao todo em cada direção.

Desde que o valor verdadeiro de todos os parâmetros era zero, as estimativas são equivalentes aos erros de estimação. Dez experimentos foram realizados com cada método e a covariância amostral foi computada. A Figura 1 mostra os resultados para a estimativa de θ_1 . A linha sólida mostra o resultado de estimar os desalinhamentos e o conjunto reduzido (não redundante) de parâmetros de distorção simultaneamente (Método 3). A linha pontilhada e tracejada representa os casos de estimativas alternadas de desalinhamentos e de coeficientes (não redundantes) de distorção (Método 2). Por fim a linha tracejada mostra o Método 1, no qual são estimados alternadamente os desalinhamentos e o conjunto redundante de parâmetros. Os Métodos 2 e 3 são parcamente distinguíveis, enquanto que o Método 1 revela um grande movimento Browniano. O mesmo fenômeno é aparente nas estimativas de θ_2 e θ_3 , mostradas nas Figuras 2 e 3. A Figura 4 mostra o comportamento da estimativa de $a_{1,0}$, que não se espera ser sensível à redundância com os parâmetros de desalinhamento. De fato, os erros de estimação dessa grandeza mostram o mesmo comportamento nos três métodos.

A Figura 5 mostra o comportamento de $b_{0,0}$ (linha pontilhada-tracejada), θ_1 (linha tracejada) e $b_{0,0} + \theta_1$ (linha sólida) quando estes são estimados pelo Método 1. O óbvio movimento Browniano nas variâncias amostrais ou nas variáveis individuais contrastam dramaticamente com o comportamento grosso modo constante da soma das duas estimativas, conforme era esperado.

Para entender o fenômeno do movimento Browniano, considere-se o seguinte modelo simplificado

$$z_k = \theta + a + v_k. \quad (61)$$

e v_k é uma sequência branca Gaussiana, com covariância R . Aqui, θ representa os desalinhamentos e a representa os correspondentes coeficientes redundantes de distorção. O modelo acima é um tanto simplificado, mas contém o fato essencial de que os dois conjuntos de parâmetros são completamente redundantes. Este modelo de medidas não está, contudo, de todo mal. Na prática pode-se sempre construir a estimativa de máxima-verossimilhança de $(\theta + a)$.

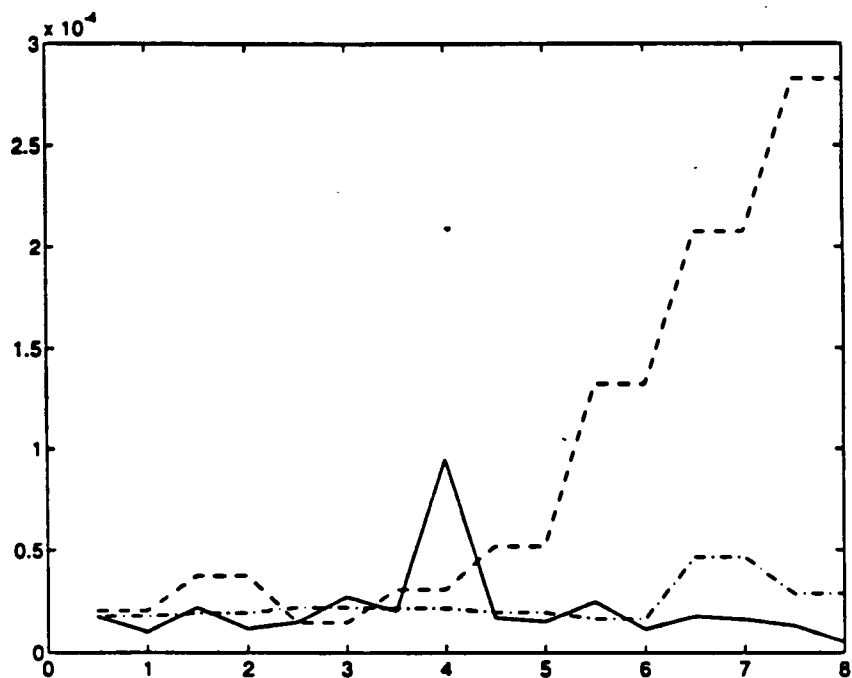


Figura 1. Estimação de θ_1

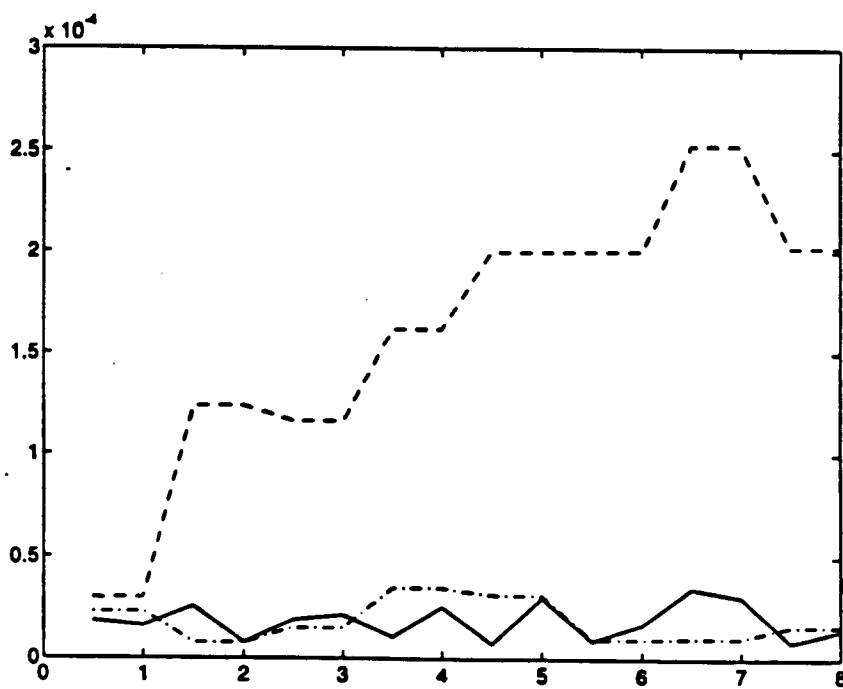
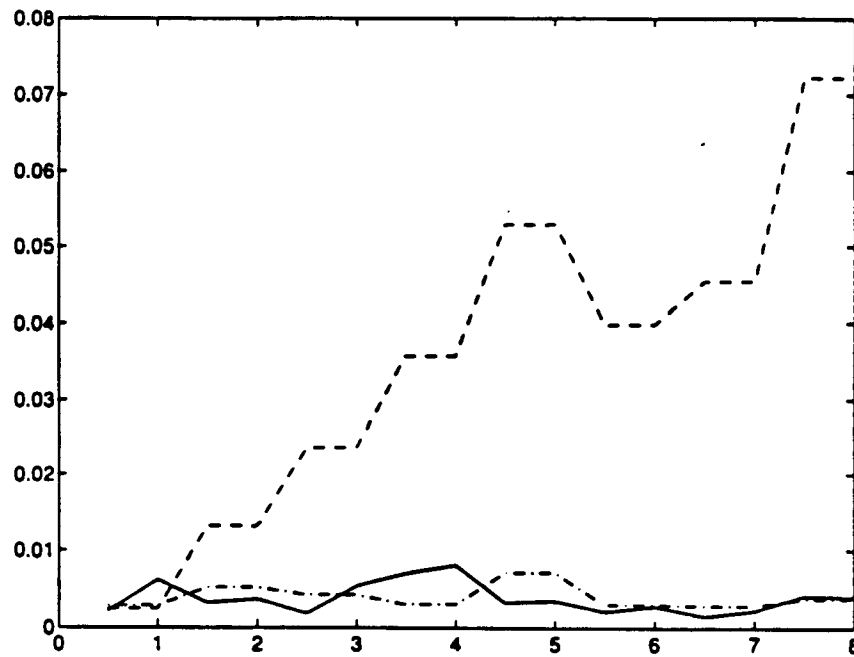
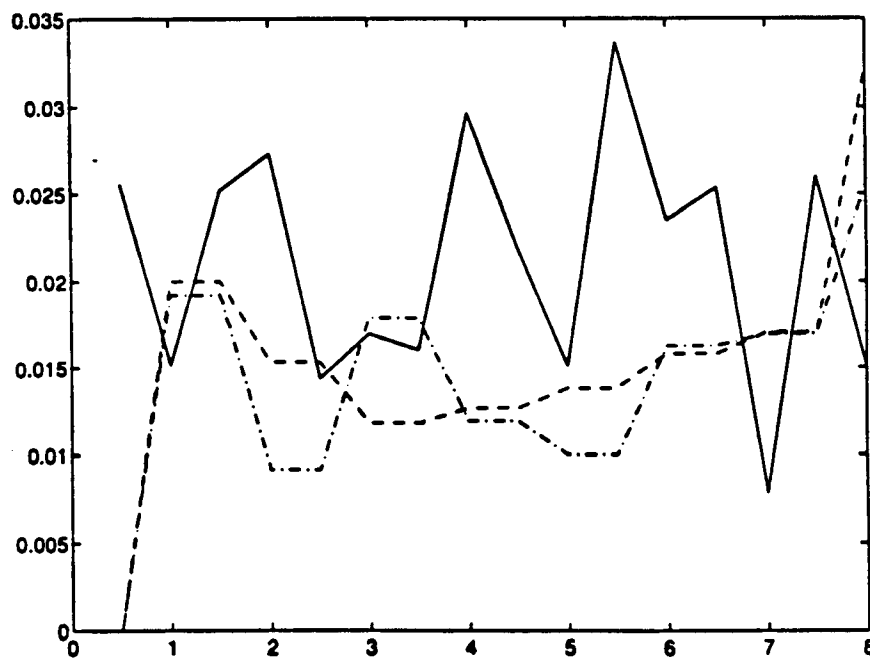


Figura 2. Estimação de θ_2

Figura 3. Estimação de θ_3 Figura 4. Estimação de $\alpha_{1,0}$

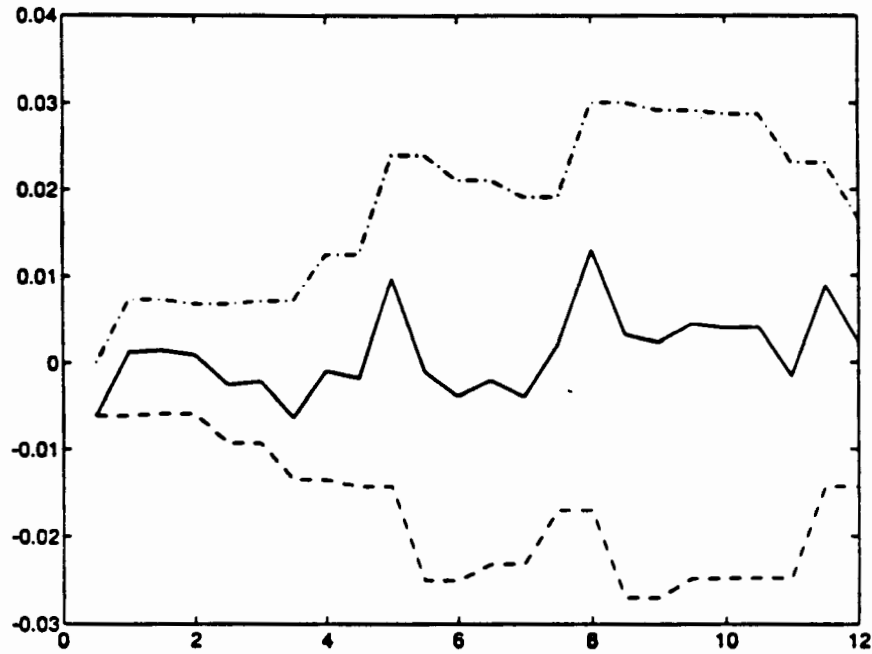


Figura 5. Estimação de θ_1 e $b_{0,0}$

Se a variável θ é estimada nas vezes ímpares assumindo a estimativa prévia (ou valor *a priori*) para a , então obtemos para estimativa de θ_{2k+1}

$$\theta_{2k+1}^* = z_{2k+1} - a_{2k}^* \quad (62)$$

Analogamente, nas vezes pares, estimando a adotando as estimativas prévias para θ resulta

$$a_{2k+2}^* = z_{2k+2} - \theta_{2k+1}^* \quad (63)$$

A combinação desses dois resultados leva a

$$a_{2k+2}^* = a_{2k}^* + z_{2k+2} - z_{2k+1} = a_{2k}^* + v_{2k+2} - v_{2k+1} \quad (64)$$

Analogamente, para as estimativas de θ obtém-se

$$\theta_{2k+1}^* = \theta_{2k-1}^* + z_{2k+1} - z_{2k} = \theta_{2k-1}^* + v_{2k+1} - v_{2k} \quad (65)$$

Suponhamos que os valores verdadeiros e *a priori* de θ e a sejam nulos. Então ambos θ_{2k+1}^* e a_{2k}^* executarão um movimento Browniano com covariância $2R$ (desde que cada ciclo compreende dois intervalos entre medidas). Se as calibrações são realizadas a cada dia no decorrer de cinco anos, então ao final dos cinco anos, terá sido introduzido um erro de estimação em θ e em a com covariância da ordem de $1600R$. Cada uma das equipes, a do instrumento e

a de operação de voo, por outro lado, acreditará erroneamente que a matriz de covariância do erro de suas estimativas seja da ordem de R , cometendo um erro em confiança no desvio padrão com um fator de 40. Se o erro de estimação de um único lote for da ordem de 5 segundos de arco, então ao final dos cinco anos no exemplo acima o desvio padrão do movimento Browniano será da ordem de 3.5 minutos de arco, o que em geral é incompatível. A solução, certamente, é estimar somente a , ou melhor, somente θ mas não ambos.

CONCLUSÕES

Uma metodologia consistente foi desenvolvida para estimar os parâmetros de alinhamento e distorção de um sensor de plano focal. Esta metodologia elimina do modelo de distorção os parâmetros pobremente identificáveis que levariam o modelo a ser redundante no limite quando o número de parâmetros tender a infinito. Algoritmos específicos foram dados para realizar os cálculos eficientemente.

AGRADECIMENTOS

Um dos autores (R. V. F. L.) deseja agradecer ao Conselho Nacional de Pesquisas e Desenvolvimento (CNPq) do Brasil, pela bolsa de pós-doutoramento no decurso deste trabalho. A hospitalidade do Department of Electrical Engineering of The University of Maryland e o encorajamento do Professor William S. Levine são reconhecidos com gratidão.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 SHUSTER, M. D. "Focal-Plane Representation of Rotations," *Journal of Astronautical Sciences* (a ser publicado).
- 2 SHUSTER, M. D., PITONE, D. S. and BIERMAN, G. J. "Batch Estimation of Spacecraft Sensor Alignments, I. Relative Alignment Estimation," *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 39, No. 4, pags. 519–546, October–December, 1991.
- 3 SHUSTER, M. D., and PITONE, D. S. "Batch Estimation of Spacecraft Sensor Alignments, II. Absolute Alignment Estimation," *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 39, No. 4, pags. 547–571, October–December 1991.
- 4 SHUSTER, M. D. "A Survey of Attitude Representations," *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 41, No. 4, pags. 439–517, October–December 1993.
- 5 WONG, K. W. "Basic Mathematics of Photogrammetry," in SLAMA, C. C., THEURER, C., and HENRIKSEN, S. (eds.) *Manual of Photogrammetry*, American Society of Photogrammetry, Falls Church, Virginia, 1980, pags. 37–101.
- 6 BLANTON, J. N., and JUNKINS, J. L. "Dynamical Constraints in Satellite Photogrammetry," *AIAA Journal*, Vol. 15, No. 3, 1977, pags. 488–98.